

D'Hondt-ova metoda

D'Hondtova metoda raspodele mandata u proporcionalnim izbornim sistemima nazvana je po belgijskom matematičaru Victoru D'Hondtu koji ju je opisao 1878. godine. Metoda pripada grupi deliteljskih metoda "linearnog" tipa, i najbližnja je Jeffersonovoj metodi, ili Sainte-Lague metodi). Metode se često nazivaju i metodama "najvećeg količnika".

D'Hondtova je metoda trenutno najrasprostranjenija metoda izbora poslanika i odbornika u državama s proporcionalnim izbornim sistemima.

Osim toga, danas u Srbiji nije značajnije artikulisan zahtev za prelazak na neku drugu metodu proporcionalnog izbora, ili pak neku većinsku metodu, te ostaje za pretpostaviti da će se i u eventualnim izmenama izbornog zakonodavstva zadržati D'Hondtova metoda.

Kod metoda delitelja, broj osvojenih glasova svake liste deli se nizom delitelja. U Srbiji nizom od 1-250.

Potom se osvojena mesta dodeljuju redom listama koje postižu najveći količnik.

Mesta se dodeljuju sve dok nisu dodeljena sva raspoloživa mesta u izornoj jedinici.

Cela Srbija je jedna izborna jedinica. Ovo je jedna povoljnost što će biti u nastavku matematički dokazano. Ovo je vrlo značajna činjenica kod primene ove metode ali se može kritikovati iz političkog konteksta.

D'Hondtova metoda je, među svim deliteljskim metodama, najjednostavnija, budući da su delitelji prirodni brojevi. Ilustrujmo raspodelu mandata D'Hondt-ovom metodom na jednome najprostijem primeru.

Neka na izborima sudeluju tri stranke - A, B i C - koje se bore za osvajanje pet mandata. Neka su stranke redom osvojile 30, 21 i 11 glasova. Konstruišemo tabelu delitelja tako da svaki rezultat redom delimo brojevima 1, 2, 3, 4 i 5.

	1	2	3	4	5
lista A	30	15	10	7.5	6
lista B	21	10.5	7	5.25	4.2
lista C	11	5.5	3.67	2.75	2.2

tabela: Primer raspodele mandata D'Hondtovom metodom

U tabeli smo boldirali i iskosili najvećih pet delitelja koji listama donose mandate, i to sledećim redosledom: **prvi** mandat donosi prvi delitelj listi A (30), **drugi** mandat nosi prvi delitelj liste B (21), **treći** mandat ide drugom delitelju liste A (15), **četvrti** prvom delitelju liste C (11), a **peti** drugom delitelju liste B (10.5). Kada bi se, npr, delio i šesti mandat, on bi išao trećem delitelju liste A (10). Ovako, od pet mandata, liste A i B dobijaju po dva, a lista C jedan.

(postoje moćni softveri koji količnike automatski sortiraju po veličini, zatim softver za brojanje kodiranih količnika i onda rezultat. Do rezultata se može doći ovom metodom na najmanje još dva načina)

Izborni sistem u Srbiji propisuje tzv. cenzus ili nominalni izborni prag od 5%. Da bi izborna lista sudelovala u raspodeli mandata mora imati osvojeni broj glasova od ukupnog broja birača koji su izašli na glasanje i potpisali se u izvod biračkog spiska u izornoj jedinici za 1 veći od 5%.

Pored ovoga postoji i tzv. prirodni prag, koji je u Srbiji manji od 5%, odnosi se na nacionalne manjine, koje takođe sudeluju u raspodeli mandata.

U analizi izbornih sistema ispituju se mnogi pojmovi, kao što su **reprezentabilnost**, ili **pravednost sistema**. Jedan od ciljeva analize često je **odnos broja osvojenih glasova i broja dodeljenih mesta u parlamentu**.

Popularno, taj se količnik predstavlja kao **broj glasova koje je određena stranka morala osvojiti za jedno mesto u parlamentu**.

Poznato je da u Ustavu SAD-a postoji odredba koja se interpretira da "odnos dobijenih glasova i osvojenih mesta za različite savezne države mora biti što bliži jednakosti koliko je to moguće" (Woodall, 1986). (reprezentabilnost)

Drugi je kriterij analiza:

- razlika između procenta osvojenog na izborima i procenta osvojenih mesta u parlamentu. Ta se razlika može meriti kao apsolutna ili kao relativna u odnosu na broj osvojenih glasova.

Ocena za meru odstupanja od savršene reprezentabilnosti može dati maksimalna vrednost te razlike (posmatrano s obzirom na liste koje su prešle izborni prag), zbir njihovih apsolutnih vrednosti, ili pak zbir njihovih kvadrata, slično regresionoj analizi (Gauss-ov metod)

Veličine koje se dobijaju tim analizama često služe kao osnov za kritiku kako je D'Hondtova metoda naklonjena velikim strankama, tj. prvim dvema listama koje osvajaju najveći broj glasova.

Sledi iznenađujući zaključak da na reprezentabilnost ne utiče u tolikoj meri sama metoda, koliko utiče broj poslanika ili odbornika u Skupštinama.

U ovom tekstu pažnju ćemo posvetiti analizi uticaja broja mandata koji se dodeljuju u izbornoj jedinici na reprezentabilnost metode.

Naša pažnja će biti usmerena na uticaj velikog broja mandata na reprezentabilnost metode što ćemo analizirati kroz asimptotsko ponašanje metode.

Kao osnovni kriterijum reprezentabilnosti uzećemo relativno odstupanje udela osvojenih mandata od udela osvojenih glasova u odnosu na izborni rezultat maksimalno (tj. 100%) kada je broj osvojenih mandata jednak nuli.

Matematičko pojašnjenje pojma reprezentabilnosti

Uvodimo sledeće oznake. Neka $W_1, W_2, \dots, W_k \in \mathbb{N}$ označava broj glasova koji je svaka od k lista dobila na izborima. Ukupan broj glasova označimo sa $W \in \mathbb{N}$. Neka $M_1, M_2, \dots, M_k \in \mathbb{N}$ označava broj mandata dodeljenih svakoj od tih k lista, dok sa $M \in \mathbb{N}$ označimo ukupan broj dodeljenih mesta.

Uvodimo oznaku za udeo glasova i -te liste dobijenih na izborima, $w_i = \frac{W_i}{W}$ kao i

oznaku za udeo dodeljenih mesta i -toj listi, $m_i = \frac{M_i}{M}$

Kao kriterijum relativnog odstupanja tada bismo zapisati kao: $\frac{w_i - m_i}{w_i}$ gde je w_i

udeo osvojenih glasova, a m_i udeo osvojenih mandata a **takođe je razlika $w_i - m_i$ po modulu.**

Sada je jasno da je vrednost tog izraza maksimalna, tj. iznosi 1, u slučaju kada je broj dodeljenih mandata, pa time i njihov udio, m_i jednak nuli.

Što je više vrednost izraza $\frac{w_i - m_i}{w_i}$ po modulu manja od jedan reprezentabilnost je

veća a najveća je kada je vrednost izraza jednaka nuli što znači da je $w_i = m_i$ (apsolutna reprezentabilnost)

Asimptotsko ponašanje D'Hondtove metode

Ova osobina je posebno došla do izražaja u izbornom sistemu Srbije. U nastavku ćemo pokazati da je reprezentabilnost metode primenjene u izbornom sistemu Srbije maksimalna (što bi rekli velika količina pravednosti je prisutna).

LEMA 1.

Neka liste dobijaju redom W_i , $i = 1, \dots, k$ glasova na izborima. Tada za i -tu listu i svaki prirodan broj n postoji ukupan broj manadata $M \in \mathbb{N}$, takav da i -ta lista dobija n mandata.

Dokaz:

Bez smanjenja opštosti možemo pretpostaviti da su liste poređane po broju osvojenih glasova. Neka je i -ta lista ta kojoj želimo dodijeliti n mandata. Tada j -te liste, $j = 1, \dots, i - 1$ osvajaju više glasova od i -te liste. Za svaki broj osvojenih glasova tih lista, W_j , postoji prirodan broj M_j takav da vredi:

$$\frac{W_j}{M_j} > \frac{W_i}{n} \geq \frac{W_j}{M_j + 1} \quad (1)$$

Odavde sledi da svaka od tih lista osvaja M_j mandata pre nego li na red dođe dodela n -tog mandata i -toj listi.

Liste nakon i -te liste podelimo u dve grupe: u prvu grupu stavimo liste

za koje je $\frac{W_i}{n} \leq W_j$, a u drugu grupu liste za koje je $\frac{W_i}{n} > W_j$

Liste iz druge grupe mogu osvojiti mandat tek nakon što i -toj listi bude dodijeljen n -ti mandat. Za te liste stavimo $M_j = 0$. Za liste iz prve grupe opet postoje prirodni brojevi

M_j koji zadovoljavaju nejednakost (1); budući da je $\frac{W_i}{n} \leq W_j$, sledi da je pripadni M_j

barem jednak 1.

Odavde sledi da svaka od tih lista osvaja tačno M_j mandata, pre nego li se i -toj listi dodeli n -ti mandat. Za i -tu listu sada postavimo $M_i = n$. Time je dokazano konstrukcijom da ukupan broj mandata

$$M = \sum_{i=1}^k M_i \quad \text{zadovoljava tvrdnju postavljenu u lemi 1.}$$

LEMA 2.

Neka su $A, B \in \mathbb{P}$ realni brojevi za koje je $A > B$. Definišemo dva harmonijska

niza: $\{a_i = \frac{A}{i}, i \in \mathbb{N}\}$, i $\{b_i = \frac{B}{i}, i \in \mathbb{N}\}$. Za proizvoljan prirodan broj i , označimo sa n_i

broj elemenata niza $\{a_i\}$ za koje vredi $a_i > b_i$, te označimo :

$$p_i = \frac{n_i}{i}$$

$$p_i \rightarrow \frac{A}{B} \text{ kada, } i' \rightarrow \infty$$

Formulaciju ove leme 2. interpretiramo na sledeći način: broj i' nam predstavlja broj mandata koji su dodeljeni listi s manje osvojenih glasova, a broj $n_{i'}$ je broj mandata dodeljenih listi s više glasova, pre nego se listi s manje glasova dodeli i' -ti mandat. Tvrđnja leme je da odnos dodeljenih glasova tim dvema listama teži odnosu osvojenih glasova kada broj dodeljenih mandata teži u beskonačno.
Dokažimo ovu lemu:

Dokaz,

Neka je $i' \in \mathbb{N}$ proizvoljan prirodan broj. Tada i' -ti element liste $\{b_i\}$ iznosi $\frac{B}{i'}$

Za broj $\frac{B}{i'}$ i realan broj A tada postoji prirodni broj $n_{i'}$, za koji vredi:

$$\frac{A}{n_{i'}} > \frac{B}{i'} \geq \frac{A}{n_{i'} + 1}, \text{ odavde sledi,}$$

$$\frac{n_{i'}}{A} < \frac{i'}{B} \leq \frac{n_{i'} + 1}{A}$$

množenjem nejednačine sa $\frac{A}{i'}$, dobija se:

$$\frac{n_{i'}}{i'} < \frac{A}{B} \leq \frac{n_{i'}}{i'} + \frac{1}{i'} \quad (2)$$

Sada za svako $\varphi > 0$ postoji $i' \in \mathbb{N}$ takav da je $\frac{1}{i'} < \varphi$ pa se prema nejednačini (2)

vrednost $\frac{n_{i'}}{i'}$ nalazi u φ -okolini tačke $\frac{A}{B}$.

Zaključujemo da postoji granična vrednost izraza $\frac{n_{i'}}{i'}$, te da uopšte vredi

$$\lim_{i' \rightarrow \infty} \frac{n_{i'}}{i'} = \frac{A}{B}, \quad \text{što je tvrdnja leme 2.}$$

Asimptotsko ponašanje udela broja glasova (w_i) i udela u broju mandata (m_i)

Propozicija 1.

Neka liste redom dobijaju W_i , $i = 1, \dots, k$ glasova, gdje je $W = \sum_{i=1}^k W_i$ ukupan broj glasova.

Neka se D'Hondtovom metodom listama dodeli M_i , $i = 1, \dots, k$ mandata, gde je

$$M = \sum_{i=1}^k M_i \text{ ukupan broj manda}$$

Tada za svaki $i = 1, \dots, k$, udeo i-te liste u mandatima $m_i = \frac{M_i}{M}$ teži udelu i-te liste u glasovima $w_i = \frac{W_i}{W}$ kada broj mandata teži velikom broju

Dokaz,

Prema lemi 1. za dovoljno veliki M svaka lista osvaja barem jedan mandat, pa stoga bilo koje dve liste zadovoljavaju uslove leme 2. Neka su stoga i -ta i j -ta lista osvojile po W_i , odnosno W_j glasova. Po lemi 2 vredi da je za $M \rightarrow \infty$ odnos dodeljenih

$$\text{mandata } \frac{M_j}{M_i} \rightarrow \frac{W_j}{W_i}, \text{ Budući da je trivijalno ispunjeno } \frac{M_i}{M_i} \rightarrow \frac{W_i}{W_i},$$

vredi:

$$\frac{M_1}{M_i} \rightarrow \frac{W_1}{W_i}, \frac{M_2}{M_i} \rightarrow \frac{W_2}{W_i}, \dots, \frac{M_k}{M_i} \rightarrow \frac{W_k}{W_i}, \text{ sabiranjem sledi,}$$

$$\left(\frac{M_1}{M_i} + \frac{M_2}{M_i} + \dots + \frac{M_k}{M_i} \right) \rightarrow \left(\frac{W_1}{W_i} + \frac{W_2}{W_i} + \dots + \frac{W_k}{W_i} \right), \text{ kako je,}$$

$$M = \sum_{i=1}^k M_i \text{ i } W = \sum_{i=1}^k W_i \text{ onda sledi,}$$

$$\frac{M}{M_i} \rightarrow \frac{W}{W_i} \Rightarrow \frac{M_i}{M} \rightarrow \frac{W_i}{W} \Rightarrow m_i \rightarrow w_i, \text{ što je i trebalo dokazati}$$

Iz ovog rezultata možemo zaključiti da bi maksimalnu (opštu) reprezentabilnost postigli provođenjem opštih parlamentarnih izbora samo u jednoj izbornoj jedinici.

Ovo je baš slučaj u Srbiji, kada je cela Srbija jedna izborna jedinica a bira se dosta veliki broj poslanika (250), pa je reprezentabilnost odnosno pravednost izbornog sistema gotovo perfektna.

Ima jedan kriterijum koji se ekstenzivno koristi u parlamentarnim demokratijama s proporcionalnim izbornim sistemom, a to **je kriterijum stabilnosti parlamentarne većine.**

U kontekstu ovog teksta, u kojem podrazumevamo upotrebu D'Hondtovog izbornog modela, taj se kriterijum ispunjava preko parametra - **izbornog praga**, (cenzusa) tj. udela u ukupnom broju glasova koji lista mora da prikupi da bi stekla pravo na učestvovanje u dodeli mandata.

Izborni pragovi

U pojedinim izbornim sistemima u Evropi, kao i u Srbiji, D'Hondtova se metoda koristi u kombinaciji s izbornim pragom, koji ćemo označavati sa $pn \in (0,1)$ (indeks "n" odnosi se na oznaku "nominalan" izborni prag; za razliku od "prirodnog" izbornog praga koji uvodimo kasnije).

Izborna lista može sudelovati u podeli mandata ukoliko je njen udeo u ukupnom broju glasova veći od pn , tj. ukoliko za i -tu listu vredi $w_i > pn$. Ako je pak udeo liste u ukupnom broju glasova manji od pn , lista ne sudeluje u podeli mandata, čak i ako bi joj na osnovu ostvarenog rezultata kroz D'Hondtovu metodu bio dodeljen jedan ili više mandata.

Prag je, dakle, administrativna mera, i rezultat je političke odluke, te nije posledica provođenja same metode. Takav prag ćemo nazivati *nominalnim* izbornim pragom. U Srbiji je nominalni izborni prag izbornim zakonodavstvom propisan na 5%, tj. $pn = 0.05$.

Osim nominalnog izbornog praga, sama D'Hondtova metoda proizvodi jednu vrstu praga, koji se obično naziva "skrivenim" ili "prirodnim". U ovom tekstu koristit ćemo se drugom varijantom naziva. Naime, s obzirom na broj mandata koji se dodeljuju kroz metodu, postoji realan broj $pp \in (0,1)$, takav da lista koja osvoji udeo u glasovima veći od pp sigurno osvaja barem jedan mandat. Važno je odmah naglasiti da nominalni i prirodni prag nisu pragovi iste vrste.

Nominalni izborni prag je veličina čiji je prelazak za listu *potreban*, ali ne i dovoljan uslov za osvajanje mandata.

U uslovima $pn > pp$ prelazak prirodnog izbornog praga, garantuje listi da će joj kroz D'Hondtovu metodu biti dodeljen bar jedan mandat.

Postizanje vrednosti prirodnog izbornog praga (pp) je potreban i dovoljan uslov za dobijanje bar jednog mandata a možda i više. Kada bi bilo obrnuto, da je $pn < pp$ tada je to potreban uslov za učestvovanje u raspodeli mandata ali ne mora biti i dovoljan uslov da se dobije mandat.

Nominalni izborni prag i asimptotsko ponašanje (p_n)

Svi zaključci u prethodnom tekstu izvedeni su iz pretpostavke da se mandati dele primenom D'Hondtove metode bez upotrebe nominalnog izbornog praga. U ovom ćemo delu razmotriti šta se događa sa karakteristikom reprezentabilnosti rezultata u situaciji kada je propisan nominalni izborni prag, tj. koji je uticaj nominalnog praga na rezultate provođenja metode.

Po svojoj karakteristici, nominalni izborni prag je propisan zakonom, te se primenjuje nezavisno o sprovođenju same metode raspodele mandata, i to na način da se apriori, pre same primene metode, administrativno propiše koje liste uopšte ulaze u proces podele mandata. To znači da se listama koje nisu prešle nominalni prag (p_n) automatski dodjeljuje broj mandata $M_i = 0$.

Bez smanjenja opštosti opet ćemo pretpostaviti da su liste poređane po broju osvojenih glasova, od najvećeg ka najmanjem, te da osvajaju W_i , $i = 1, \dots, k$ glasova. Sa $n \in \{0, \dots, k\}$ označit ćemo poslednju listu koja je osvojila udeo u glasovima veći od nominalnog izbornog praga, tj. za koju je $w_n > p_n$ te da vredi $i \leq n$ za svaku listu za koju je $w_i > p_n$.

Vredi sledeća propozicija o asimptotskom ponašanju metode:

Propozicija 2.

Neka liste redom dobijaju W_i , $i = 1, \dots, k$ glasova, gdje je $W = \sum_{i=1}^k W_i$ ukupan broj važećih glasova.

Neka se D'Hondtovom metodom listama dodeli M_i , $i = 1, \dots, k$ mandata, gde je ,

$M = \sum_{i=1}^k M_i$ ukupan broj mandata. Neka se nominalni izborni prag-procentat nalazi u

skupu brojeva $p_n \in (0,1)$

Prirodni broj $n \in \{0, \dots, k\}$ je broj lista koje su prešle zadati nominalni izborni prag.

Sa \overline{W}_n označimo sumu glasova lista koje su prešle nominalan izborni prag, tj.

$$\overline{W}_n = \sum_{i=1}^n W_i .$$

Tada za svaki $i = 1, \dots, n$, ukoliko takav i uopšte postoji, udeo i -te liste u mandatima

$m_i = \frac{M_i}{M}$ teži udelu i -te liste u glasovima $w_i = \frac{W_i}{\overline{W}_n}$, kada M teži velikom broju.

Dokaz:

Nominalni izborni prag na administrativnom nivou ne dopušta ulazak lista koje osvoje udele glasova manje od p_n u proceduru podele mandata.

Uz pretpostavku da postoji bar jedna lista koja je osvojila udeo glasova veći od p_n , tj.

uz pretpostavku da je $n \geq 1$, sledi da je $\overline{W}_n \neq 0$, a tih n lista ulaze u proceduru podele mandata bez više bilo kakvih ograničenja.

Time su zadovoljene pretpostavke propozicije 1. :

$$\frac{M}{M_i} \rightarrow \frac{W}{W_i} \Rightarrow \frac{M_i}{M} \rightarrow \frac{W_i}{W} \Rightarrow m_i \rightarrow w_i , \text{ pa odavde sledi gornja tvrdnja.}$$

Dakle, i u slučaju korištenja nominalnog praga, D'Hondtova metoda zadržava asimptotsko ponašanje koje teži udelima lista u glasovima, **no ovaj put udelima u ukupnom broju glasova lista koje su prešle nominalni izborni prag.** Pri tome metoda asimptotski jednako "nagrađuje" male i velike stranke, tj. liste s malim i velikim udelom glasova;

Udeli svih lista u ukupnom broju glasova lista koje su prešle nominalni prag dobijaju se množenjem ukupnog udela liste brojem $\frac{\overline{W}_n}{W}$, dakle brojem koji ne zavisi od broja glasova koji je osvojila neka lista.

FENOMEN LEGITIMITETA VLADANJA

Ovaj fenomen nije matematičke naravi, prevashodno je politički poriv glasača-građanina da, neku mu nametnutu vlast, podrži ili istoj da pošalje jasnu političku poruku "da joj je lepa kuća što dalje".

Ovaj fenomen i njegovu svrsishodnost u aktuelnoj izbornoj utakmici obradićemo kao posebnu datoteku.

Početak aprila meseca, 2016.godine

napisao
Rajko Krajišnik